3.5　函数图形的描绘

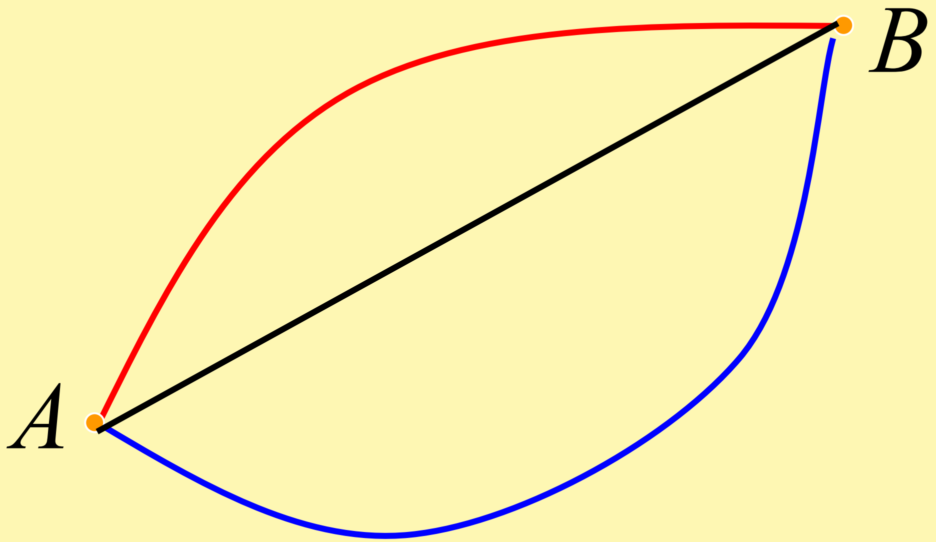
3.5.1、曲线的凹凸与拐点

3.5.2、　曲线的渐近线

3.5.3、　函数图形的描绘

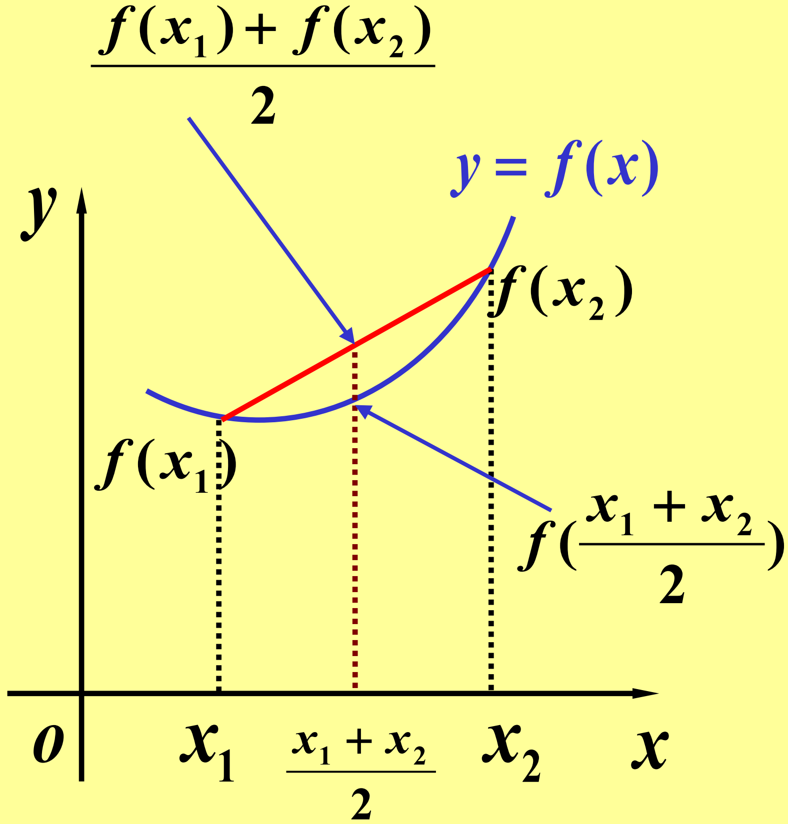
3.5.1、曲线的凹凸与拐点

如图所示



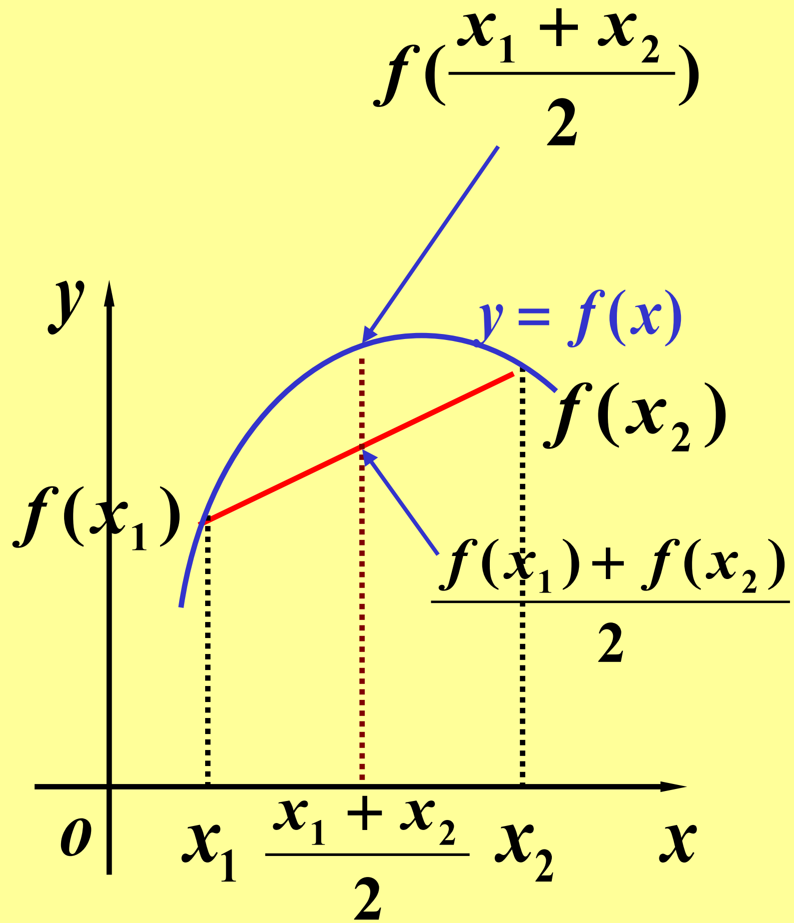
如果弧AB位于弦AB的下方,我们称曲线AB呈凹形.

如果弧AB位于弦AB的上方,我们称曲线AB呈凸形.



图形上任意弧段位

于所张弦的下方

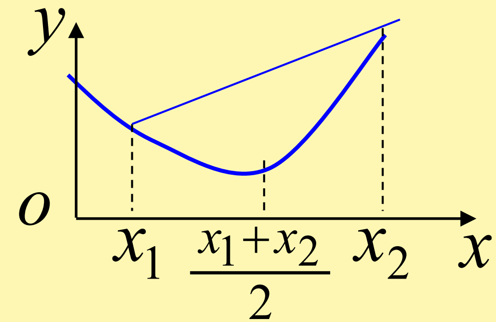


图形上任意弧段位

于所张弦的上方

定义3.5.1 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，$\forall x_1, x_2 \in I$，

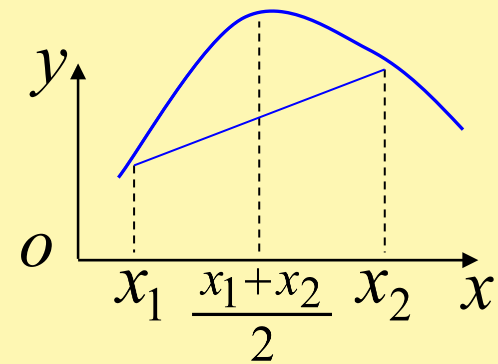
(1) 若恒有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) < \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，



则称 $f(x)$ 的图形是**凹**的；

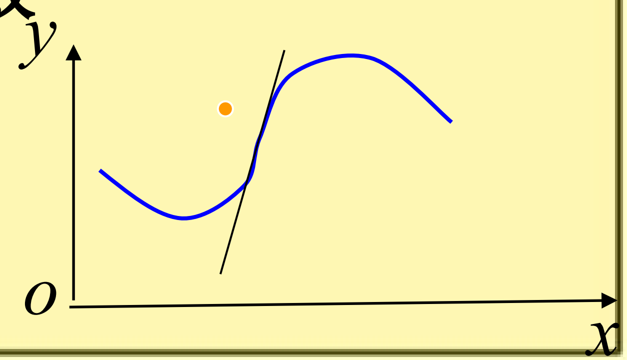
注：有些教材称函数 $f(x)$ 是凸函数

(2) 若恒有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) > \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，



则称 $f(x)$ 的图形是**凸**的 .

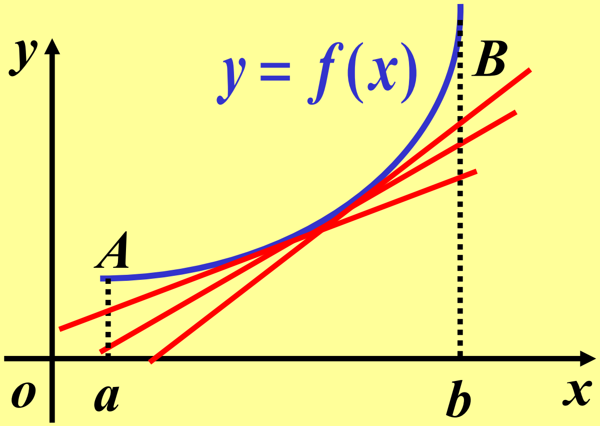
注：有些教材称函数 $f(x)$ 是凹函数

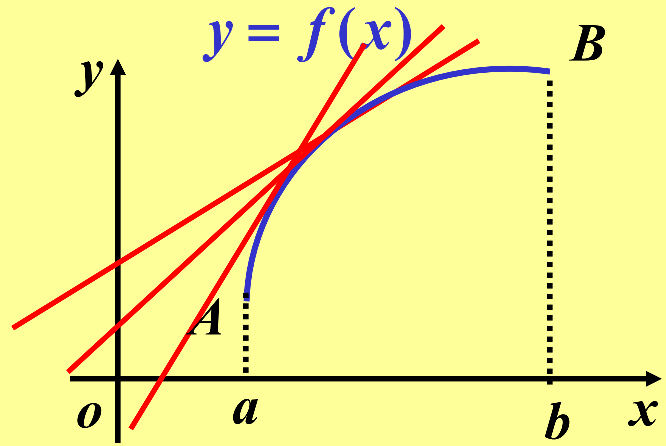


连续曲线上凹凸分界点

$(x_0, f(x_0))$ 称为拐点.

判定方法





$f'(x)$ 递增

$y'' > 0$

$f'(x)$ 递减

$y'' < 0$

定理3.5.1 设函数 $f(x)$在区间I 上有二阶导数

(1) 在I内 $f''(x)>0$, 则 $f(x)$ 在 I 内图形是凹的;

(2) 在I内 $f''(x)<0$,则 $f(x)$ 在 I 内图形是凸的.

证明 $\forall x_1, x_2 \in I$, 利用一阶泰勒公式可得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$f(x_1)=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\cancel{f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(x_1-\frac{x_1+x_2}{2}\right)}+\boxed{\frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(x_1-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}$$

$$f(x_2)=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\cancel{f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(x_2-\frac{x_1+x_2}{2}\right)}+\boxed{\frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(x_2-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}$$

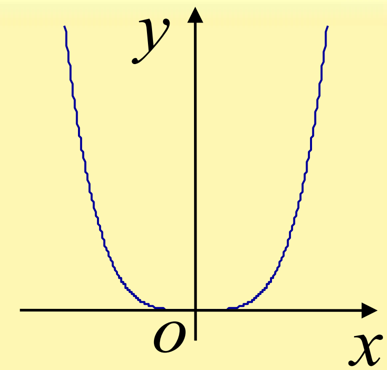
两式相加

$$f(x_1)+f(x_2)=2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\underline{\frac{1}{2!}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]}$$

当$f''(x)>0$时,$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$, 说明 (1) 成立;

$<$ $<$ (2) 证毕

例1 判断曲线 $y=x^4$ 的凹凸性.



解 $y'=4x^3, y''=12x^2$

当$x\neq 0$时, $y''>0$; $x=0$时, $y''=0$,

故曲线 $y=x^4$ 在$(-\infty,+\infty)$上是凹的.

注:

1) 若在某点二阶导数为0, 在其两侧二阶导数不变号, 则曲线的凹凸性不变 .

2) 根据拐点的定义及上述定理, 可得拐点的判别法如下:

若曲线 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续, $f''(x_0)=0$或不存在,
但 $f''(x)$ 在 x_0 两侧**异号**, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线
$y=f(x)$ 的一个拐点.

求曲线拐点的步骤如下:

1. 求 $f''(x)$;

2. 令$f''(x)=0$, 解出这方程在区间I内的实根, 并求出I内 $f''(x)$ 不存在的点;

3. 对于2中求出的一切解以及二阶导数不存在的点x_0, 检验它们左右两侧 $f''(x)$的符号.当两侧的符号相反时, $(x_0, f(x_0))$点是$y=f(x)$的拐点;当两侧的符号相同时, $(x_0, f(x_0))$点不是$y=f(x)$的拐点.

例2 求曲线 $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的凹凸区间及拐点.

解 1) 求 y''

$$y' = 12x^3 - 12x^2, \quad y'' = 36x^2 - 24x = 36x(x - \tfrac{2}{3})$$

2） 求拐点可疑点坐标

令 $y'' = 0$ 得 $x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}$, 对应 $y_1 = 1, y_2 = \frac{11}{27}$

3） 列表判别

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}, +\infty)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	凹	1	凸	$\frac{11}{27}$	凹

故该曲线在 $(-\infty, 0]$ 及 $[\frac{2}{3}, +\infty)$ 上是凹的，**在** $[0, \frac{2}{3}]$ **上**是凸的，点 $(0, 1)$ 及 $(\frac{2}{3}, \frac{11}{27})$ 均为拐点.

例3 求曲线$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2} & x\ge 0\\ -\dfrac{x^2}{2} & x<0\end{cases}$的凹凸区间及拐点.

解 容易求得

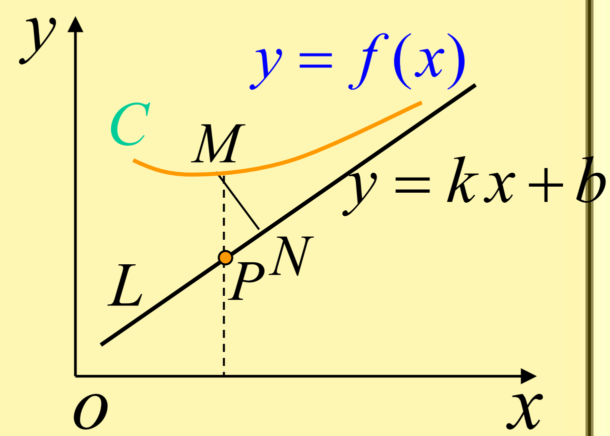
$$f'(x)=\begin{cases}x & x\ge 0\\ -x & x<0\end{cases}\qquad f''(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

由此可见，$f''(0)$不存在，而区间$(-\infty,0]$为函数的凸区间，区间$[0,+\infty)$为函数的凹区间，因此点$(0,0)$为曲线$y=f(x)$的拐点 .

3.5.2 曲线的渐近线

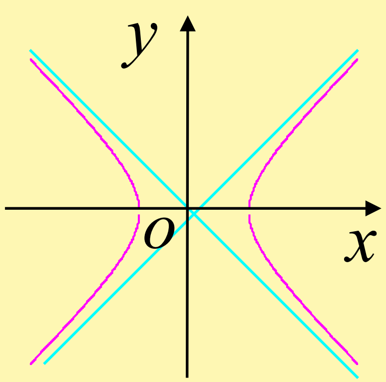
定义 3.5.2 若曲线 C上的点M 沿着曲线无限地远离原点时，点M 与某一直线 L 的距离趋于 0，则称直线L为曲线C 的**渐近线**.

当斜率存在时也为“**纵坐标差**”



例如，双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

有渐近线 $\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0$



(1). 水平与垂直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$, 则曲线 $y=f(x)$ 有水平渐近线 $y=b$.

$(或x\to-\infty)$

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$, 则曲线 $y=f(x)$ 有垂直渐近线 $x=x_0$.

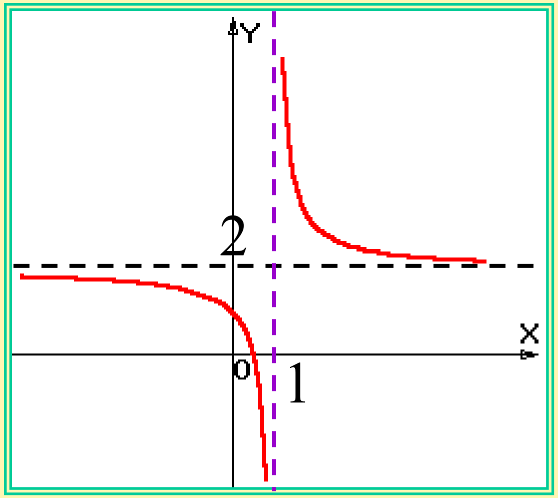
$(或x\to x_0^-)$

例4 求曲线 $y=\dfrac{1}{x-1}+2$ 的水平渐近线和垂直渐进线.

解 $\because \lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1}{x-1}+2)=2 \quad \therefore\ y=2$

为水平渐近线; $\because \lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{x-1}+2)=\infty$,

$\therefore\ x=1$ 为垂直渐近线.



（2）. 斜渐近线

若 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{或} x\to-\infty)}}[f(x)-(kx+b)]=0$，则曲线 $y=f(x)$ 有斜渐近线 $y=kx+b$.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-kx-b}{x}=0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0$$

$$\Downarrow$$

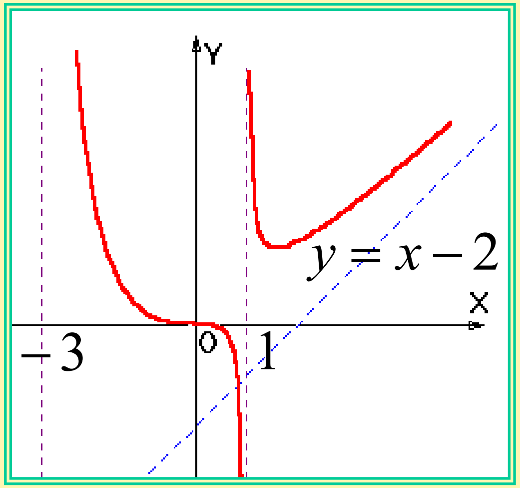
$$k=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-\frac{b}{x}\right]$$

$$\therefore\quad \boxed{k=\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{或} x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}}$$

$$\boxed{b=\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{或} x\to-\infty)}}[f(x)-kx]}$$

例5 求曲线 $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$ 的渐近线.

解 $\because\ y=\dfrac{x^3}{(x+3)(x-1)}$, $\lim\limits_{x\to -3} y=\infty$,
(或 $x\to 1$)



所以有垂直渐近线 $x=-3$ 及 $x=1$

又因为 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+2x-3}=1$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+3x}{x^2+2x-3}=-2$$

$\therefore\ y=x-2$ 为曲线的斜渐近线.

3.5.3 函数图形的描绘

步骤 ：

1. 确定函数 $y=f(x)$ 的定义域 ，求出函数的间断点并考察其奇偶性、对称性及周期性 ；

2. 求 $f'(x), f''(x)$, 并求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 为0和不存在的点 ；

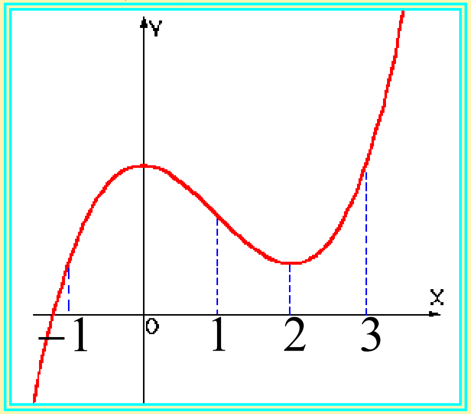
3. 列表判别增减及凹凸区间 ， 求出极值和拐点 ；

4. 求渐近线 ；

5. 确定某些特殊点 ， 描绘函数图形 .

例6 描绘 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+2$ 的图形.

解 1) 定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 无对称性及周期性.



2) $y'=x^2-2x$, $y''=2x-2$,

令 $y'=0$, 得 $x=0,\ 2$

令 $y''=0$, 得 $x=1$

3)

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$		$-$	0	$+$		$+$
y		2		$\frac{4}{3}$		$\frac{2}{3}$	
		(极大)		(拐点)		(极小)	

4)

x	-1	3
y	$\frac{2}{3}$	2

例7 描绘函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形.

解 1) 定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 图形关于 y 轴对称.

2) 求关键点

$$y'=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x\,e^{-\frac{x^2}{2}},\qquad y''=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)$$

令 $y'=0$ 得 $x=0$; 令 $y''=0$ 得 $x=\pm 1$

3) 判别曲线形态

x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	0	$-$		$-$
y''		$-$	0	$+$
y	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}}$	
	(极大)		(拐点)	

标准正态总体的函数表示式

$$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

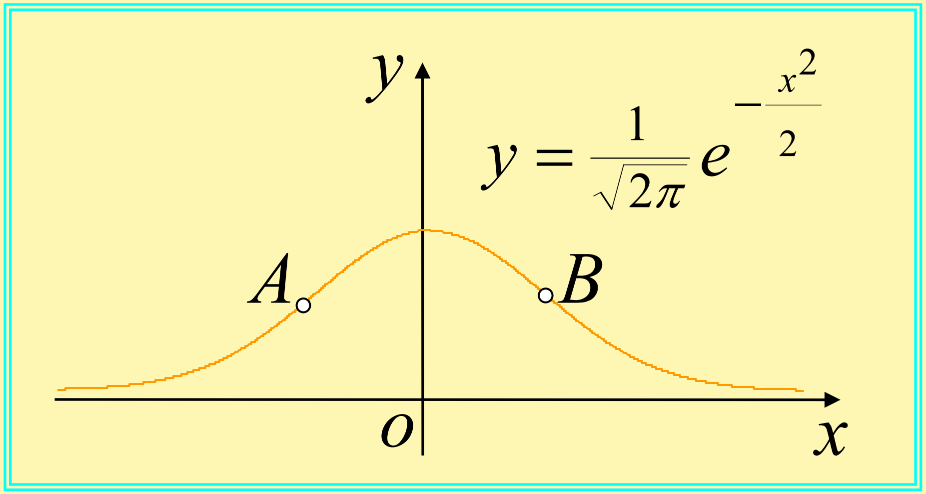
x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	0	$-$		$-$
y''		$-$	0	$+$
y	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	↘	$\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$	↘
	(极大)		(拐点)	

4）求渐近线

$$\lim_{x\to\infty} y=0$$

$\therefore y=0$ 为水平渐近线

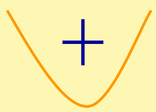
5）作图



小结

1. 曲线凹凸与拐点的判别

$f''(x) > 0, x \in I$ ⟶ 曲线 $y = f(x)$ 在 I 上向下凹



$f''(x) < 0, x \in I$ ⟶ 曲线 $y = f(x)$ 在 I 上向上凸

拐点

2. 曲线渐近线的求法

水平渐近线 ； 垂直渐近线；斜渐近线

3. 函数图形的描绘——— 按作图步骤进行